Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 5

№1

Пусть Маша в начале расположит вначале в ряд, а затем на отдельном месте 3 первых книге на ней левую ногу, оставшиеся на нулевую. Т.к. книги одного цвета визуально неразличимы, то различных вариантов расположить книги в ряд она сможет $N = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{6!}{2^3}$ способами. Для каждого выделенного набора книг для каждой пары создать еще 3 варианта, кроме того, что уже имеют: (вав + вав, не вав + вав, вав + не вав, не вав + не вав) вав; после для верхней не вав; могли не выбрать вообще ни вав, ни не вав, и не вав + вав, различаются т.к.

Можно использовать оборот листа для записи решений

порядок, в которых надевают носки: валет, ~~а затем~~ и вывернутый носок отлич. от левых
=> ~~с вывора~~ для каждого набора носков существует 4. 4. 4 (4^3, т.к. 3 пары) способов их вывернуть или не вывернуть => $N_4 = N \cdot 4^3 = \frac{6!}{2^3} \cdot 2^6 =$
$= 6! \cdot 2^3 = 720 \cdot 8 = 5760$

Ответ: 5760 способами

№5

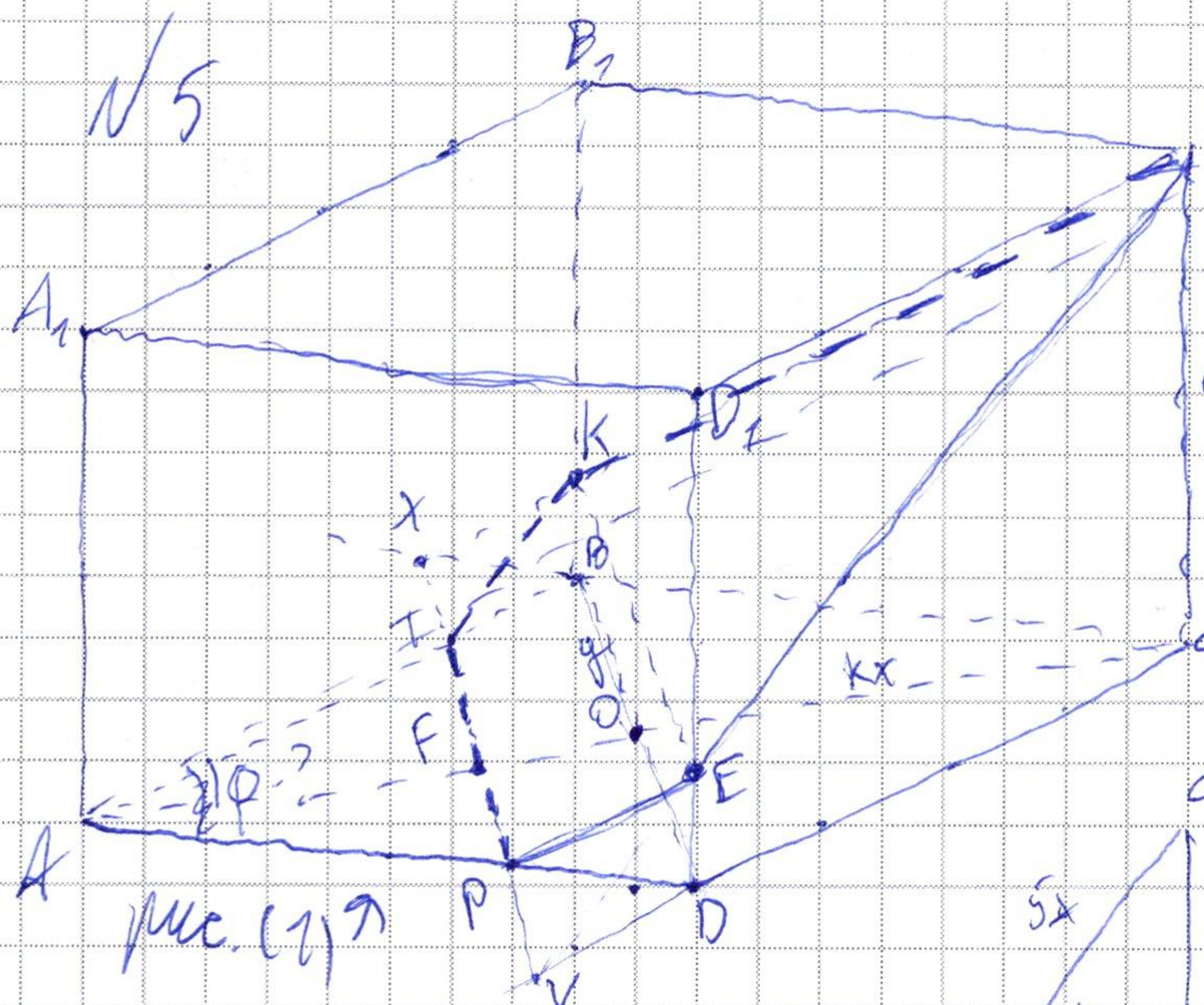


рис. (1)

не параллелен (т.к. $k < 3$)

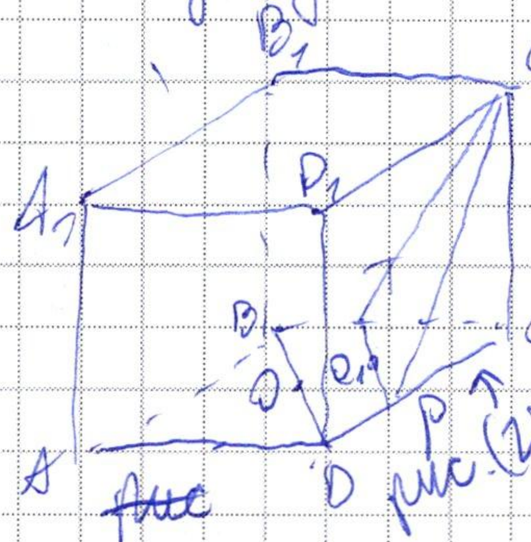
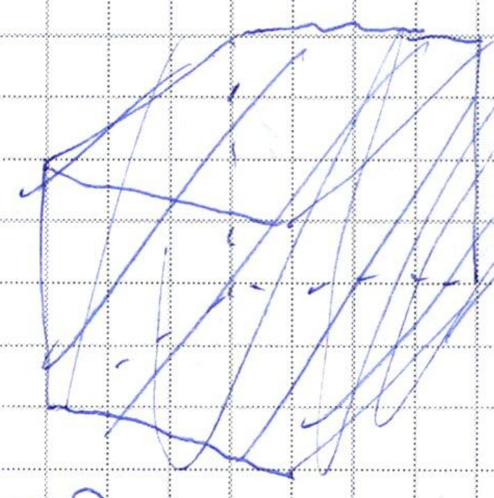


рис. (2)

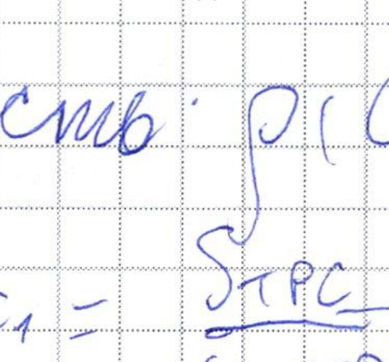
$C_1 \parallel TP \parallel BD$, $T, P \in (ABC)$

Допустим, что $T \in BC$ (=) $P \in DC$ =>

Плоскость в рис. (2) ↑ сечения зад. Δ:



$O_1 C \perp TP$



$\cos\alpha = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

Пусть $P(C, TP) = 3x$ => $CC_1 = 4x$

$S_{TPC_1} = \frac{S_{TPC}}{\cos(\angle(TPC_1), \angle(ABC_1))} = \frac{S_{TPC}}{\cos\alpha} = \frac{S_{TPC}}{\frac{3}{5}} =$

$= \frac{5}{3} S_{TPC}$

~~$\angle ABCD = 2$~~ Пусть

$S_{ABCD} = 2 S_{BPC} =$

$= 2 \cdot \left(\frac{CO}{CO_1}\right)^2 \cdot S_{TPC} = 2 \left(\frac{CO}{CO_1}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} S_{TPC_1}$

~~$CO_1 = 3x$~~ ~~$CC_1 = 4x$~~

О-ва BD $CO = kx$,

olymp.bmstu.ru

$\frac{S_{TPC_1}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{TPC_1}}{2 \cdot \left(\frac{3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot S_{TPC_1}} = \frac{35}{24}$

$\frac{1}{\frac{k^2}{9} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{35}{24}$ $\quad k^2 = 9 \cdot \frac{4}{7}$ $\quad k = \frac{6}{\sqrt{7}}$ $\quad k < 3$

т.к. $k < 3 \Rightarrow$ $\frac{6}{\sqrt{7}} < 3$

$\sqrt{\frac{36}{7}} < \sqrt{9}$

$\sqrt{5\frac{1}{7}} < \sqrt{9}$

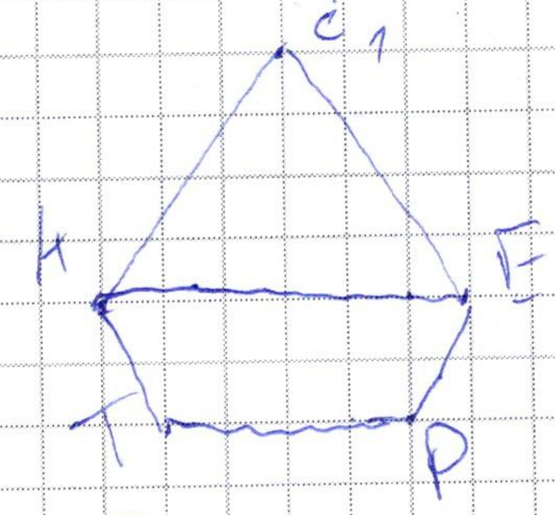
$P \in (CC_1D) \Rightarrow T \in AB$, $P \in AD$

2. (рис. (1)) $TP \cap CD = Y$ $YC_1 \cap DD_1 = E$

$PT \cap CB = X$ $XC_1 \cap BB_1 = K$

$TPEC_1K$ - искомое. т.к. $\begin{cases} C_1 \in (TPE) \\ TP \parallel BD \\ TP \in (TPE) \end{cases}$

TKC_1EP:



Пусть F - сеч. TP O - сеч. BD

Пусть $CF = 3x \Rightarrow CC_1 = 4x$

Пусть $BD = y$, $CO = \frac{1}{2}x$

$S_{TKC_1EP} = S_{KC_1E} + S_{KETP}$ $\quad$ т.к. $S_{KEC_1} =$

$= \frac{S_{BDC}}{(OS2)}$ т.к. $BDC =$ сеч. $KEC_1 (ABC) \Rightarrow S_{KEC_1} =$

$= \frac{BD \cdot OC}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{5}{6} BD \cdot OC = \frac{5}{6} \cdot y \cdot kx = \frac{5xyk}{6}$

$$S_{KEPT} = \frac{S_{TBDP}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{TP+BD}{2}\cdot FO}{\cos\alpha}$$

$$FO = (3-k)x \qquad TP = BD\cdot\frac{AF}{AO} =$$

$$= y\cdot\frac{2kx-3x}{4x} = y\cdot\frac{2k-3}{4}$$

$$S_{\cancel{KBDP}} = \frac{\left(y\cdot\frac{2k-3}{4}+y\right)\cdot(3-k)x}{2\cdot\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5}{3}xy+3\left(\frac{k-1}{4}\right)\cdot(3-k)}{2} =$$

$$= \frac{5}{2}xy\left(\frac{k-1}{4}\right)(3-k)$$

$$\frac{S_{KF_1EPT}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{KEPT}+S_{KEC_1}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{2}xy\left(\frac{k-1}{4}\right)(3-k)+\frac{5}{6}xyk}{kxy} =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{k-1}{4}\right)(3-k)+\frac{5}{6}k = \frac{35}{24}$$

$$\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{k-1}{2k}(3-k)+\frac{k}{6}}{k} = \frac{7}{24} \qquad \frac{(k-1)(3-k)}{2k^2}+\frac{1}{6}-\frac{7}{24}=0 \;|\cdot 24$$

$$12\left(\frac{(k-1)(3-k)}{2k^2}\right)+4-7=0 \;/\cdot k^2 \qquad 12(k-1)(3-k)=3k^2 \;|:3$$

$$-4(k-1)(k-3)=k^2 \qquad -4(k^2-4k+3)=k^2 \qquad -4k^2+16k-12=k^2$$

$$5k^2-16k+12=0 \qquad D=256-4\cdot5\cdot12=256-240=$$

$$=16=4^2 \qquad \begin{cases} k=\frac{16+4}{10}=2 \\ k=\frac{16-4}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2 \end{cases}$$

Если $k=1{,}2 \Rightarrow$

$AC=2kx=2{,}4x\in$

$\Rightarrow T, P$ совпад. и $T\in AA_1 \Rightarrow S_{сеч.}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{S_{сеч.}}{S_{ABCD}}=\frac{5}{3}$

У разобьём получившуюся фигуру на 4 части:

AA_1B_1BF, A_1KTB_1EF, K_1KTG_1EF, DCG_1GF

(1) (2) (3) (4)

$V_1 = V_4 = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}_1} \cdot EK = \frac{1}{3} \cdot KE \cdot AB \cdot AA_1 =$

$= \frac{1}{3} \cdot 3м \cdot 2м \cdot 1м = 2м^3$ $\quad V_1 + V_4 = 2м^3 + 2м^3 = 4м^3$

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4м^3 + 6м^3$ $\quad tg\angle EAK \leq 3$

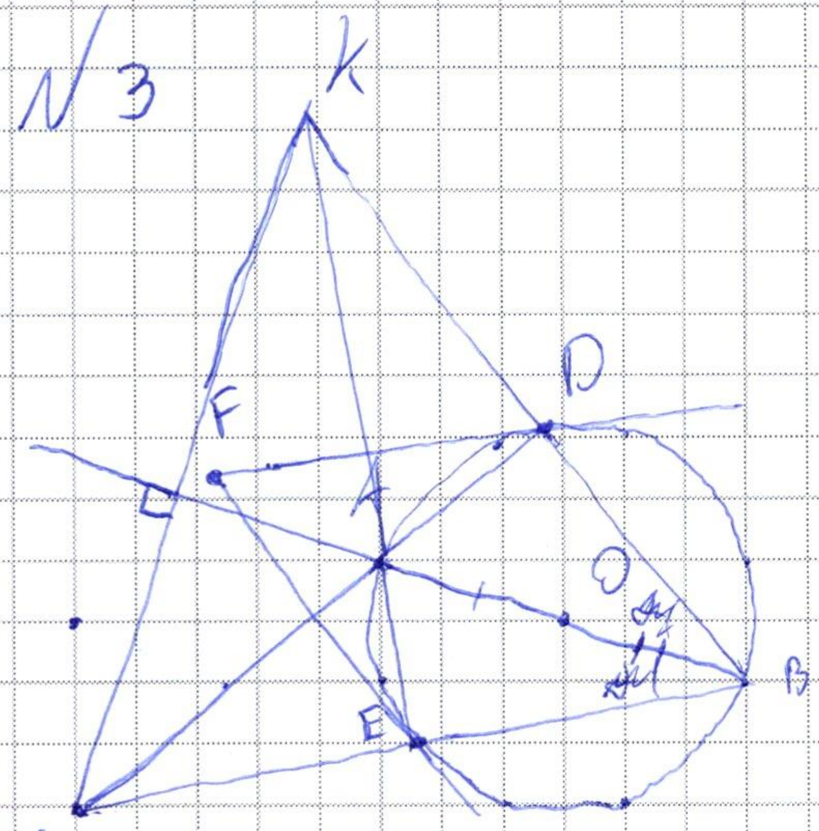
м.к. $BK > 1м$

$V_{2,3} = V_3 = \frac{1}{2}$ (это 2 половинки треугольной призмы, призмы) $\quad V_2 = \frac{1}{2} \cdot EK \cdot KT \cdot TG =$

$= \frac{1}{2} \cdot 3м \cdot 2м \cdot 1м = 3м^3$ $\quad V_2 + V_3 = 3м^3 + 3м^3 = 6м^3$

Ответ: $V_{max} = 10м^3$

№3



$R = ?$ см $\quad \frac{CK \cdot AK \cdot AC}{4 S_{ACK}}$

O - сер. AB и (O, $\frac{AB}{2}$)

$FD = FE = 6$ $\quad \angle ADB =$

$= \angle AEB = 90°$ м.к. вис.

опир. на диам.

$\triangle BEA \sim \triangle BFC$ по углам

$\triangle BDA \sim \triangle BFK$ по углам

olymp.bmstu.ru

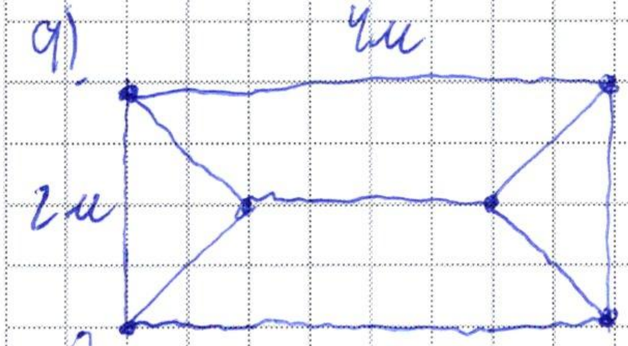
Вариант задания 1

Не подход. по услов. $\Rightarrow$ $k=2$ $\Rightarrow$ $AC_1 = 2h = 4м$

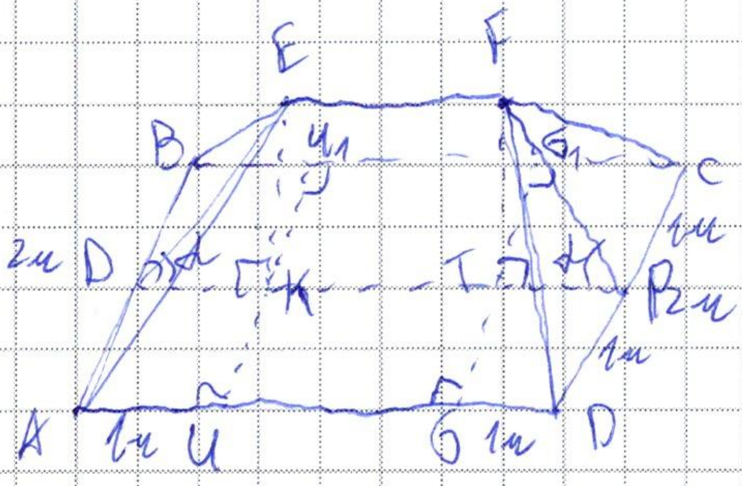
$\operatorname{tg}(AC_1; (ABC)) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{CC_1}{AC} = \frac{4м}{4м} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

Ответ: $\varphi = 45^\circ$

№6



вид сверху



а площадь, занимаемая

м.ч. требуется найти максимальный объём V,

$AD = 4м$ $AB = 2м$

смеси постоянна, то чтоб

сделать максимальную высоту

куча снега, при этом $\operatorname{tg}\beta \le 3$. т.к.

высота макс. то, $\operatorname{tg}\beta$ ↑ при β↑

а) $\operatorname{tg}\beta = 3$. чтобы это условие

выполнялось для сечения вдоль-м

BEFC и AEFD то нужно, чтобы

$\rho(EF; AD) = \rho(EF; BC) \Rightarrow$ P_{AD} P - сер. AD

D - сер. AB $AH = HK = KH_1 = TG = TG_1 = \frac{AB}{2} = 1м$

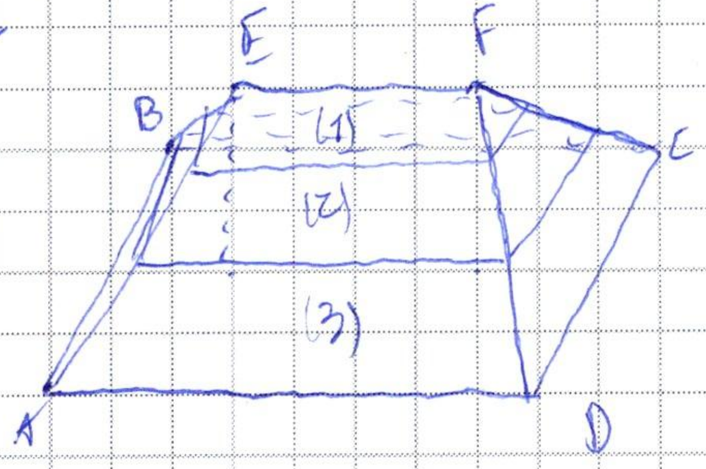
$\Rightarrow$ $EK = FT = 3м \Rightarrow$ $DA = TP = \frac{EK}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{3}{3} = 1м$. Для покрытия

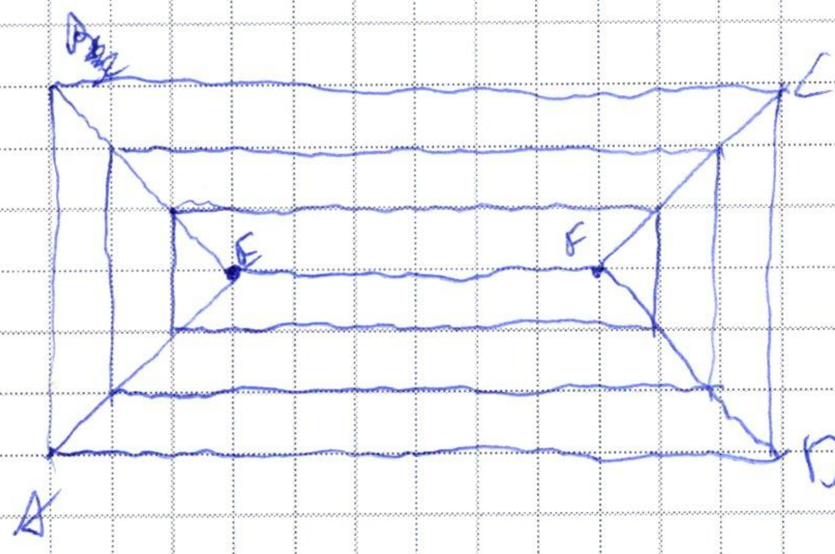
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 1

№ 6





1 клетка = $\frac{1}{3}$ м

$V_в = V_{c_1} \cdot 0,3 + V_{c_2} \cdot 0,6 + V_{c_3} \cdot 0,9$

высота каждого слоя = $\frac{h}{3} = 1$ м

$V_{c_1} = 2 \cdot \frac{1\text{м} \cdot \frac{1}{3}\text{м} \cdot \frac{2}{3}\text{м}}{2} + 2 \cdot \frac{2\text{м} \cdot 1\text{м} \cdot \frac{1}{3}\text{м}}{2} =$

$= \frac{4}{27}\text{м}^3 + \frac{2}{3}\text{м}^3 = \frac{4+18}{27}\text{м}^3 = \frac{22}{27}\text{м}^3$

$V_{c_2} = V_{c_1} + V_{c_2} - V_{c_1} = 2 \cdot \frac{2\text{м} \cdot \frac{2}{3}\text{м} \cdot \frac{1}{3}\text{м}}{2} + 2 \cdot \frac{2\text{м} \cdot 2\text{м} \cdot \frac{2}{3}\text{м}}{2} -$

$- V_{c_1} = \frac{32}{27}\text{м}^3 + \frac{8}{3}\text{м}^3 - \frac{22}{27}\text{м}^3 = \frac{42}{27}\text{м}^3 + \frac{8}{3}\text{м}^3 =$

$= \frac{4}{9}\text{м}^3 + \frac{8}{3}\text{м}^3 = \frac{4+24}{9}\text{м}^3 = \frac{28}{9}\text{м}^3$

$V_{c_3} = V - (V_1 + V_2) = 10\text{м}^3 - \frac{104}{27}\text{м}^3 = \frac{240-104}{27}\text{м}^3 =$

$= \frac{136}{27}\text{м}^3$

$W = \frac{20}{27}\text{м}^3 \cdot 0,3 + \frac{28}{9}\text{м}^3 \cdot 0,6 + \frac{136}{27}\text{м}^3 \cdot 0,9 =$

$= \frac{20 \cdot 3}{27 \cdot 10}\text{м}^3 + \frac{28 \cdot 3}{9 \cdot 9}\text{м}^3 + \frac{136 \cdot 9}{10 \cdot 27}\text{м}^3 =$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$$= \left(\frac{6}{27} + \frac{28}{3\cdot 7} + \frac{166}{30}\right) м^3 = \left(\frac{2}{9} + \frac{28}{21} + \frac{166}{30}\right) м^3 =$$

$$= \left(\frac{20 + 168 + 498}{90}\right) м^3 = \frac{686}{90} м^3 =$$

$$= \left(\frac{2}{9} + \frac{28}{21} + \frac{83}{15}\right) м^3 = \left(\frac{10 + 60 + 24 + 240 + 9}{45}\right) м^3 =$$

$$= \frac{300 + 34 + 9}{45} м^3 = \frac{334 + 9}{45} м^3 = \frac{343}{45} м^3$$

Ответ: $\frac{343}{45} м^3$

№2 По биному Ньютона:

$$(3 + \sqrt{7})^{100} = 3^{100} \cdot C_{100}^{1} \cdot 3^{99} \cdot (\sqrt{7})^{1} + \ldots + C_{100}^{i} \cdot 3^{100-i} \cdot (\sqrt{7})^{i} + \ldots + (\sqrt{7})^{100}$$

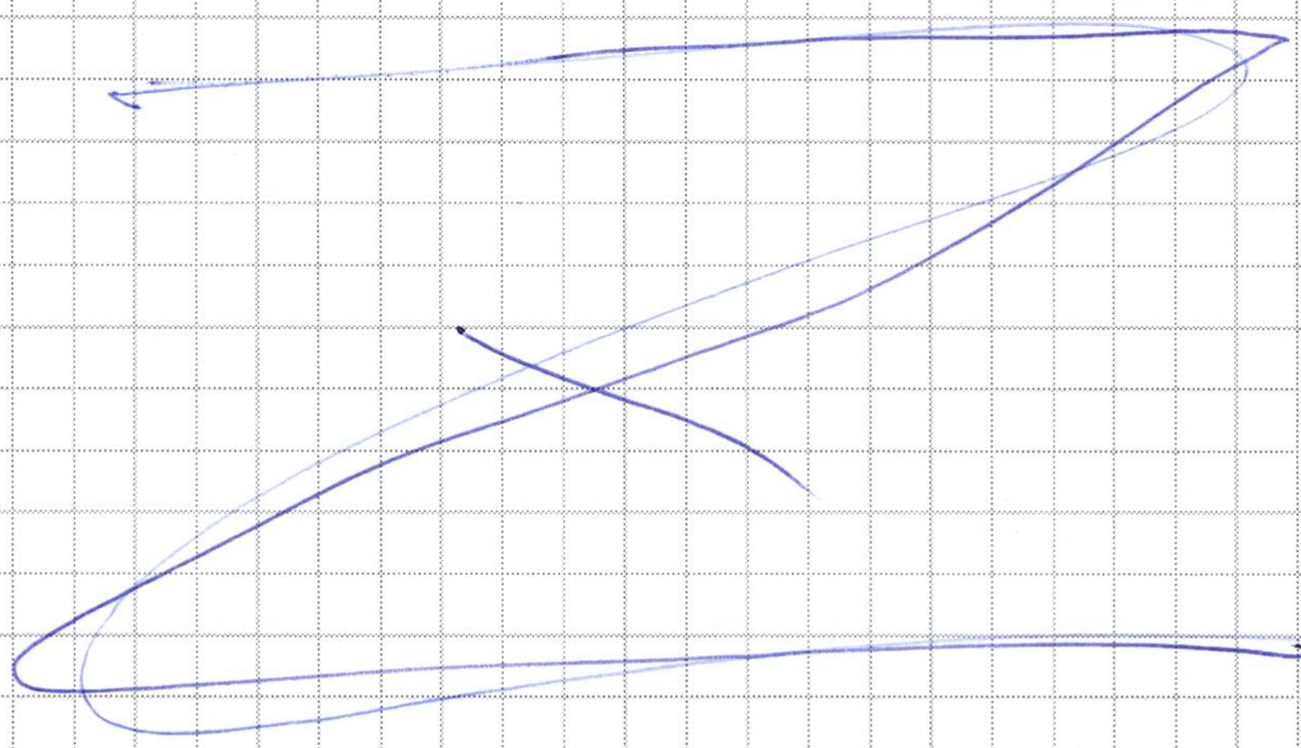
т.к. когда $\sqrt{7}$ возводится в чётную степень он сокращается целым числом, а значит на дробную часть не влияет. => нас интересуют только нечёт. i в ст. $\sqrt{7}$

$$S = C_{100}^{1} \cdot 3^{99} \cdot (\sqrt{7})^{1}$$

$$S = C_{100}^{1} \cdot 3^{99} \cdot \sqrt{7} + C_{100}^{3} \cdot 3^{97} \cdot (\sqrt{7})^{3} + C_{100}^{5} \cdot 3^{95} \cdot (\sqrt{7})^{5} + \ldots + C_{100}^{2i} \cdot 3^{99-2i} \cdot (\sqrt{7})^{99}$$

$$S = \sum_{i=0}^{49} C_{100}^{2i+1} \cdot 3^{99-2i} \cdot 7^{i} \cdot \sqrt{7}$$ - целое

т.к. часть выражения вынесли на знак => за знак после запятой S и будет ответом.



Вариант задания 1

$V_{C_2} = \frac{42}{24} м^3 = \frac{10}{24} м^3 + \frac{8}{3} м^3 = \frac{10 + 42}{24} м^3 = \frac{82}{24} м^3$

$V_{C_3} = V - (V_1 + V_2) = 10 м^3 - \frac{82}{24} м^3 - \frac{22}{24} м^3 =$

$= 10 м^3 - \frac{104}{24} м^3 = \frac{166}{24} м^3$

$M = \frac{22}{24} м^3 \cdot 0,3 + \frac{82}{24} м^3 \cdot 0,6 + \frac{166}{24} м^3 \cdot 0,9 =$

$= \left(\frac{22 \cdot 3}{24 \cdot 10} + \frac{82 \cdot 3}{24 \cdot 5} + \frac{166 \cdot 9}{24 \cdot 10} \right) м^3 = \left(\frac{11}{40} + \frac{82}{40} + \frac{83}{40} \right) м^3 =$

$= \left(\frac{11 + 82 + 249}{40} \right) м^3 = \left(\frac{260 + 85}{40} \right) м^3 = \left(\frac{345}{40} \right) м^3 =$

$= \left(\frac{23}{3} \right) м^3 = 7\frac{2}{3} м^3$

Ответ: $7\frac{2}{3} м^3$